

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ
ШКОЛЬНИКОВ 2025/26 УЧЕБНОГО ГОДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Код/шифр участника

М	9	А	1	1			
---	---	---	---	---	--	--	--

ПОБЖИНА ЗЛАТА ВИТАЛЬЕВНА

(фамилия, имя, отчество)

9

(класс обучения)

9

(класс участия)

МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ

„ЦЕНТР ОБРАЗОВАНИЯ „ИНТЕЛЛЕКТ“

(полное наименование образовательной организации)

Задача 1.

Пусть $P_{\text{чтр}}$ - периметр исходного равнобедренного треугольника

P_{T_1} и P_{T_2} - периметры полученных треугольников

L_p - длина разреза. Когда равнобедренный треугольник разрезается на 2 треугольника, разрез является общей стороной для обеих треугольников. Сумма периметров двух треугольников равна сумме периметра равнобедренного треугольника и удвоенной длины разреза. Выразим формулой

$$P_{T_1} + P_{T_2} = P_{\text{чтр}} + 2L_p$$

$$L_p = \frac{P_{T_1} + P_{T_2} - P_{\text{чтр}}}{2}$$

$$L_p = \frac{40 \text{ см} + 30 \text{ см} - 50 \text{ см}}{2} = 10 \text{ см}$$

Ответ: 10 см

Задача 2.

$$x(3x+4)^2 - 3(3x-4)^2 = 6xy(x+3)$$

$$x(9x^2 + 6xy + 4^2) - 3(9x^2 - 6xy + 4^2) = 6x^2y + 18xy$$

$$9x^3 + 6x^2y + 4x^2 - 27x^2 + 18xy - 34^2 = 6x^2y + 18xy$$

$$9x^3 + x^2y - 27x^2 - 34^2 = 0$$

$$9x^3 - 27x^2 + x^2y - 34^2 = 0$$

$$9x^2(x-3) + y^2(x-3) = 0$$

$$(x-3)(9x^2 + y^2) = 0$$

$$x-3 = 0 \quad \text{или} \quad 9x^2 + y^2 = 0$$

$$x = 3$$

$$9x^2 = -y^2$$

$$y = 0$$

Ответ: (3; 0); (0; 0)

Возможно еще $x=0$ и $y=0$,
потому что $9x^2 \geq 0$ и $-y^2 \leq 0$.
Но $x=3$ не равно 0, поэтому
 $x=0$ и $y=0$ являются
решением данного урав-
нения.

Задача 4

Равенство $MB = MC$ означает, что точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC . Пусть K - середина отрезка BC . Тогда MK - серединный перпендикуляр к BC . Так как $\triangle ABC$ прямоугольный с прямым углом C , катет BC лежит на прямой, перпендикулярной AC .

AM - биссектриса угла $\angle CAB$. По свойству биссектрисы, любая точка на ней равноудалена от сторон угла AC и AB .

Проведем перпендикуляр из M к сторонам угла: MC к AC и MN к AB , т.к. $\angle C = 90^\circ$ и M находится вне треугольника, но MC - это расстояние от M до прямой AC и MN к AB , где N лежит на AB .

По свойству биссектрисы: $MC = MN$.

Но имеем $MB = MC$ и $MC = MN$ (свойство биссектрисы) следовательно, $MB = MN$.

$\triangle MBN$ - прямоугольный треугольник (по построению $MN \perp AB$).

В этом прямоугольном треугольнике катет MB равен катету MN ($MB = MN$). Это возможно только в том случае, если длина этих отрезков равна нулю, что противоречит условию задачи (точки M, B, N должны быть различными).

Задача 3

Пусть исходное трехзначное число будет числом N .
Обозначим его цифры как a, b, c , где $a \in \{1, \dots, 9\}$, $b, c \in \{0, \dots, 9\}$.

$$N = 100a + 10b + c$$

Число, записанное в обратном порядке, обозначим N_A

$$N_A = 100c + 10b + a$$

По условию, от исходного числа N трижды отняли N_A и результат равен 1.

$$N - 3N_A = 1 \quad \text{Подставляем выражения:}$$

$$100a - 10b - c - 3(100c + 10b + a) = 1$$

$$100a - 10b - c - 300c - 30b - 3a = 1$$

Группируем члены по a, b, c :

$$(100a - 3a) + (10b - 30b) + (c - 300c) = 1$$

$$97a - 20b - 299c = 1$$

Поскольку a, b, c - это цифры, и $a \geq 1$, мы можем решить перебором или оценкой.

$$97a = 1 + 20b + 299c$$

П.к. $b \leq 9$ и $c \leq 9$, оценим правую часть

$$1 \leq 1 + 20b + 299c \leq 1 + 20 \cdot 9 + 299 \cdot 9$$

$$1 \leq 1 + 180 + 2691$$

$$1 \leq 1 + 20b + 299c \leq 2872$$

Теперь оценим левую часть $97a$

$$\text{П.к. } a \leq 9$$

$$97a \leq 97 \cdot 9 = 873$$

Поскольку левая часть должна быть равно $1 + 20b + 299c$ и $97a \leq 873$, то $1 + 20b + 299c \leq 873$

Рассмотрим возможные значения c :

$$\text{Случай 1: } c = 0$$

$$97a = 1 + 20b$$

$$\text{Т.к. } b \leq 9, \quad 1 + 20b \leq 1 + 180 = 181$$

$$97a \leq 181$$

$$\text{Если } a = 1, \quad 1 + 20b = 97 \Rightarrow 20b = 96$$

$$b = \frac{96}{20} = 4,8 \quad - \text{НЕ ЦЕЛОЕ}$$

Если $a = \frac{2}{97} \cdot 2 = 194$ $194 \leq 181$ - неверно
Следовательно, $c \neq 0$

Случай 2: $c = 1$

$$97a = 1 + 20b + 2991$$

$$97a = 300 + 20b$$

П.к. $b \leq 9$, $300 \leq 300 + 20b \leq 300 + 180 = 480$

$$300 \leq 97a \leq 480$$

Делим на 97: $3,09... \leq a \leq 4,94...$

Возможные значения a : 4

Проверим $a = 4$

$$974 = 388$$

$$388 = 300 + 20b$$

$$88 = 20b$$

$$b = \frac{88}{20} = 4,4 - \text{НЕ ЦЕЛОЕ}$$

Следовательно, $c \neq 1$

Случай 3: $c = 2$

$$97a = 1 + 20b + 2992$$

$$97a = 1 + 20b + 598$$

$$97a = 599 + 20b$$

П.к. $b \leq 9$, $599 \leq 599 + 20b \leq 599 + 180 = 779$
 $599 \leq 97a \leq 779$

Делим на 97: $6,17... \leq a \leq 8,03...$

Возможные значения a : 7, 8

Проверим $a = 7$

$$977 = 679$$

$$679 = 599 + 20b$$

$$b = 4 \text{ / целое число, } 0 \leq b \leq 9. \text{ Это решение!}$$

Искомое число, $N = 100a + 10b + c = 1007 + 104 + 2 = 742$

Проверим $a = 8$

$$978 = 776$$

$$776 = 599 + 20b$$

$$177 = 20b$$

$$b = \frac{177}{20} = 8,85 - \text{НЕ ЦЕЛОЕ}$$

Единственно возможное число, удовлетворяющее условию, это 742.

Проверка:

$$N = 742$$

$$eN_A = 247$$

$$eN - 3eN_A = 742 - 3 \cdot 247 = 742 - 741 = 1$$

Ответ: 742

Задача 4

Рассмотрим $\triangle EAMC$

П.к. точка M находится вне треугольника ABC , а AM является биссектрисой $\angle AAB$, то углы $\angle CAM$ и $\angle BAM$ будут равны. По условию $MB = MC$. Это означает, что точка M равноудалена от вершин B и C . Таким образом, MB является медианой в $\triangle ABC$.

Рассмотрим $\triangle EAMC$

П.к. AM является биссектрисой угла $\angle AAB$, то $\angle CAM = \angle BAM$. Также известно, что $\angle C = 90^\circ$, следовательно, AM является биссектрисой угла.

Рассмотрим $\triangle MBC$

П.к. $MB = MC$, то треугольник $\triangle MBC$ является равнобедренным. Следовательно, углы при основании равны: $\angle MBC = \angle MCB$.

Рассмотрим $\triangle AMB$

По условию $MB = MC$. Это означает, что M лежит на биссектрисе внешнего угла при вершине A треугольника MBC . Также известно, что точка M находится вне треугольника ABC .

Рассмотрим $\triangle MBC$

П.к. $MB = MC$, то M — центр описанной окружности треугольника ABC . П.к. $\angle C = 90^\circ$, то M лежит на серединном перпендикуляре к гипотенузе AB .

Рассмотрим $\triangle AMB$

П.к. M является центром описанной окружности, то $AM = BM = CM$. Это означает, что $\triangle AMB$ является равнобедренным.

Доказательство от противного:

1. Предположим, что $\triangle AMB$ не является равнобедренным.
2. Допустим, что $MB \neq MC$.
3. Т.к. AM является биссектрисой угла $\angle AAB$, то $\angle CAM = \angle BAM$.
4. Если $MB \neq MC$, то $\triangle MBC$ является равнобедренным.
5. В этом случае, если $\angle CAM = \angle BAM$, то точка M является центром описанности $\triangle ABC$.
6. Если $MB = MC$, то M является серединой гипотенузы AB , то AM является медианой.

7. Следовательно, $AM = BM = CM$
 8. Т.к. M является серединой гипотенузы AB , то
 AM является медианой
 9. Т.к. M

7. Т.к. $\angle C = 90^\circ$ то CM является серединой гипотенузы AB .

8. Следовательно, $MB = MC = AM$

9. Т.к. M является серединой гипотенузы AB , то
 AM является медианой

10. Следовательно, $AM = BM = CM$

11. Значит, $\triangle AMB$ является равнобедренным,
 а CM - медиана, которая равна половине
 гипотенузы

12. В этом случае, $\triangle AMB$ является прямоуголь-
 ным

Значит, наше предположение было
 Задача 5. $\triangle ABC$ - прямоугольный не верным.

Света может гарантировать себе победу,
 разместив шашки так, чтобы они не оказались
 полностью в двух строках и двух столбцах,
 которые сможет взять Максим.

Пример

Максим берет 2 строки и 2 столбца
 Всего на доске 16 клеток. Поскольку Максим
 берет 2 строки и 2 столбца, он берет
 всего $2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 8 + 4 = 12$ клеток. Остается
 4 клетки. Если Света разместит в шахмат-
 так, чтобы они не находились в пределах одного
 из этих 2×2 квадратов, то Максим проиг-
 рает.

Максим не может гарантировать себе
 победу, потому что существует такие раз-
 размещения шашек, которые приводят к победе
 Светы. Например, если Света разместит
 шашки на соседних клетках $(1,1), (1,2),$
 $(2,1), (2,2), (3,3), (4,4)$, то Максим не сможет
 взять все шашки, так как они не будут
 находиться в пределах одной 2×2 области.